Premier problème : le rail de Laplace

Extrait du concours commun polytechnique (concours national Deug 2005)

Partie A : Électromagnétisme

I. Cadre horizontal dans un champ magnétique uniforme et constant

1) Expression du flux. : $\Phi = B_0 \ell x$

2) Champ électromoteur.

Dans la barre en mouvement les porteurs de charge sont soumis à la force de Lorentz qui est, dans le référentiel du laboratoire ; une force magnétique $\overrightarrow{F} = q\vec{v} \wedge \overrightarrow{B_0}$. Cette force a la même expression dans le référentiel de la barre en mouvement. Il s'agit alors d'une force électrique $\overrightarrow{F} = q\vec{v} \wedge \overrightarrow{B_0} = q\overrightarrow{E_m}$. Le champ $\overrightarrow{E_m} = \vec{v} \wedge \overrightarrow{B_0}$ est le champ électromoteur

3) Signe du courant induit :

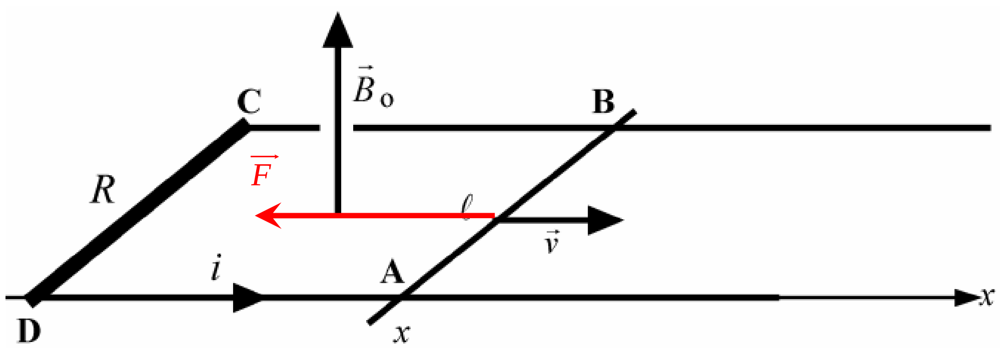
Le courant induit doit être à l'origine d'une force de Laplace $\overrightarrow{F} = i\,\overrightarrow{\mathrm{AB}} \wedge \overrightarrow{B_0}$ qui, selon la loi de modération de Lenz, s'oppose au mouvement de la barre. Cela implique que i soit **négatif**.

Nous pouvons tout aussi bien constater que le champ électromoteur $\overrightarrow{E_m} = \vec{v} \wedge \overrightarrow{B_0}$ est dirigé selon $\overrightarrow{\mathrm{BA}}$ et donc que i est négatif.

Il est également possible d'argumenter à partir de la loi de Faraday : $e = -\dfrac{d\Phi}{dt} = -B_0 \ell \dfrac{dx}{dt}$. La vitesse étant positive, e est donc négatif et donc i est négatif…

4) Expression de l'intensité du courant i : $e = -\dfrac{d\Phi}{dt} = -B_0 \ell v = Ri \quad \Rightarrow \quad i = -\dfrac{B_0 \ell v}{R}$

5) Force de Laplace : $\overrightarrow{F} = i\,\overrightarrow{\mathrm{AB}} \wedge \overrightarrow{B_0} = B_0 i\,\ell\,\overrightarrow{e_x} = -\dfrac{B_0^2 \ell^2 v}{R}\,\overrightarrow{e_x}$



6) Expression vectorielle de la vitesse :

La barre, de masse m étant supposée glisser sans frottement, le principe fondamental de la dynamique s'écrit :

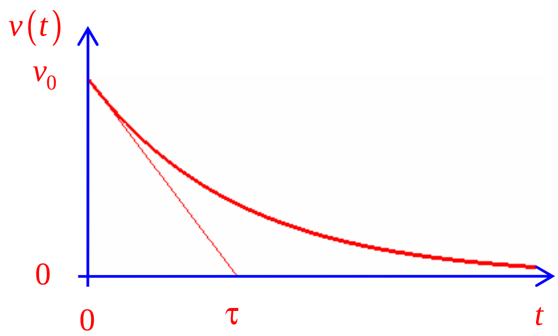
$$\overrightarrow{F} = m\frac{d\vec{v}}{dt} = -\frac{B_0^2 \ell^2}{R}\,\vec{v} \qquad \text{soit encore} \qquad \frac{d\vec{v}}{dt} + \frac{B_0^2 \ell^2}{mR}\,\vec{v} = \vec{0}$$

La solution générale de cette équation différentielle linéaire du premier ordre est une solution exponentielle. En posant $\tau = \dfrac{mR}{B_0^2 \ell^2}$, cette solution générale s'écrit : $\vec{v} = \vec{K} e^{-\frac{t}{\tau}}$. Il reste à choisir $\vec{K}$ pour satisfaire à la condition initiale $\vec{v}(0) = \vec{v_0}$ et finalement :

$$\vec{v} = \vec{v_0} e^{-\frac{t}{\tau}} = \vec{v_0} \exp\left(-\frac{B_0^2 \ell^2 t}{mR}\right)$$

7) Allure de la courbe représentant $v(t)$:

Note : Pour être valide, un graphe dont on demande « l'allure » doit comporter sur chaque axe :
— indication de la grandeur physique concernée (ici t en abscisse et v en ordonnée)
— indication de l'origine (ici 0 sur chaque axe)
— indication d'un facteur d'échelle (ici la constante de temps τ en abscisse et v_0 en ordonnée)



8) Influence de R :

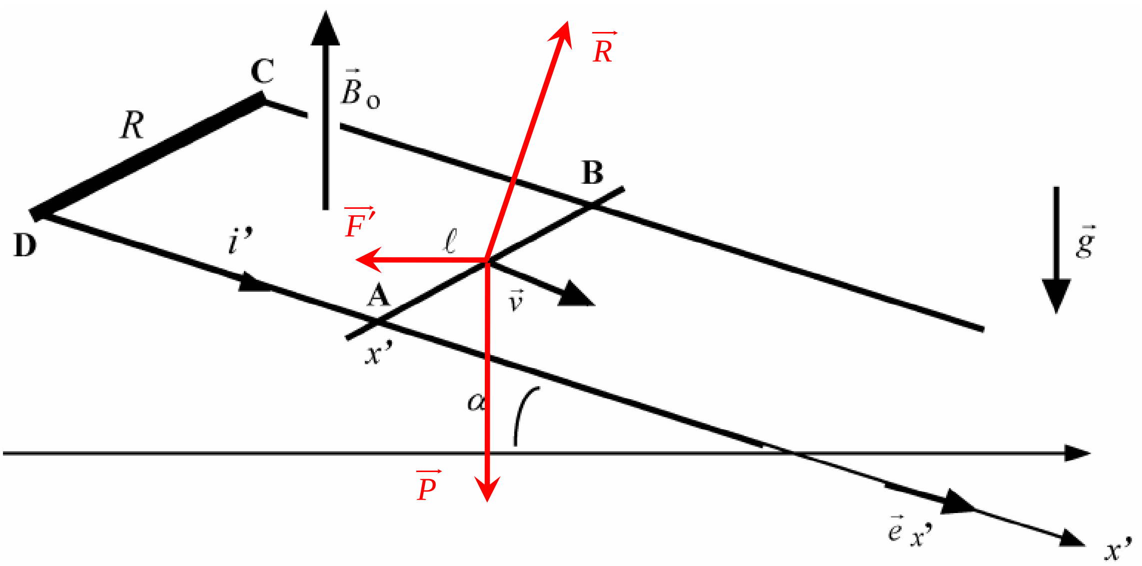
La constante de temps est proportionnelle à R. Diminuer R revient à ralentir la vitesse de la barre d'autant plus rapidement.

II. Cadre incliné dans un champ magnétique uniforme et constant

1) Expression du flux : $\Phi' = \vec{B_0} \cdot \vec{n_+} \ell x' = B_0 \ell x' \cos\alpha$

2) Intensité du courant induit : $e' = Ri' = -\dfrac{d\Phi'}{dt} = -B_0 \ell v' \cos\alpha$ et donc $i' = -\dfrac{B_0 \ell v' \cos\alpha}{R}$.

3) Inventaire des forces :



La force de Laplace $\vec{F'}$ est toujours orthogonale à $\vec{B_0}$ et à $\vec{AB}$: elle est donc horizontale et a son point d'application au milieu de AB.

Le poids $\vec{P}$ est bien sûr vertical et appliqué également au milieu de AB.

Enfin, les réactions $\overrightarrow{R_A}$ et $\overrightarrow{R_B}$ des rails sont égales, appliquées en A et B, et, en l'absence de frottement, normales au rail. Leur résultante $\vec{R} = \overrightarrow{R_A} + \overrightarrow{R_B}$ est donc appliquée au milieu de AB et inclinée d'un angle α par rapport à la verticale.

4) Expression vectorielle de la force de Laplace : $\overrightarrow{F'} = i'\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{B_0} = -\dfrac{B_0^2 \ell^2 v' \cos\alpha}{R}\,\vec{e_x}$

5) Équation différentielle du mouvement.

Il nous suffit d'écrire l'expression du principe fondamental de la dynamique en projection sur $\vec{e'_x}$, soit : $\left(\overrightarrow{F'} + \vec{P} + \vec{R}\right)\cdot\vec{e'_x} = m\dfrac{dv'}{dt}$

Avec $\overrightarrow{F'}\cdot\vec{e'_x} = -\dfrac{B_0^2 \ell^2 v' \cos\alpha}{R}\,\vec{e_x}\cdot\vec{e'_x} = -\dfrac{B_0^2 \ell^2 (\cos\alpha)^2}{R} v'$

$\vec{P}\cdot\vec{e'_x} = -mg\vec{e_z}\cdot\vec{e'_x} = +mg\sin\alpha$

et, du fait de l'absence de frottements $\vec{R}\cdot\vec{e'_x} = 0$

L'équation différentielle s'écrit donc : $\boxed{-\dfrac{B_0^2 \ell^2 (\cos\alpha)^2}{R} v' + mg\sin\alpha = m\dfrac{dv'}{dt}}$

6) Expression de $v'(t)$

Posons $\tau' = \dfrac{mR}{B_0^2 \ell^2 (\cos\alpha)^2}$ l'équation différentielle s'écrit alors : $\dfrac{dv'}{dt} + \dfrac{v'}{\tau'} = g\sin\alpha$

Il apparaît immédiatement une solution particulière constante : $v'_{\text{part}} = \tau' g \sin\alpha$

La solution générale de cette équation est donc $v' = \tau' g\sin\alpha + Ke^{-\frac{t}{\tau'}}$ et la constante d'intégration K est déterminée par la condition initiale $v'(0) = 0 = \tau' g\sin\alpha + K$.

Finalement : $$v'(t) = \tau' g\sin\alpha\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau'}}\right) = \frac{mRg\sin\alpha}{B_0^2 \ell^2 (\cos\alpha)^2}\left(1 - \exp\left(-\frac{B_0^2 \ell^2 (\cos\alpha)^2\, t}{mR}\right)\right)$$

7) Allure de la courbe représentant $v'(t)$: